

Biosignál

MUDr. Jaromír Šrámek

Biofyzikální ústav

Lékařská fakulta Masarykovy univerzity Brno

2012

- Opakování základních matematických pojmů
 - Vektory a matice
 - Komplexní čísla
 - Funkce, derivace, integrál
 - Diferenciální rovnice
- Letmý dotyk teorie systémů
- Klasifikace a analýza biosignálů
 - Co je signál?
 - Co je biosignál?
 - Co si počít s biosignálem?

Definice

Vektor je prvek vektorového prostoru, tedy nějaké množiny prvků uzavřené na nějaké sčítání vektorů a na nějaké násobení skalárem.

- Obecná definice je příliš abstraktní
- Pro nematematiky z toho důvodu prakticky nepoužitelná
- Jako vektor si tedy můžeme představit jako:
 - 1 Uspořádanou n -tici čísel – řádek
 - 2 Uspořádanou n -tici čísel – sloupec
 - 3 Libovolnou fyzikální veličinu, která má velikost a směr
 - 4 Orientovanou úsečku
 - 5 ...
- Různá vyjádření jsou ekvivalentní a navzájem převoditelná

Memento!

Řada zajímavých fyzikálních veličin má velikost i směr.

- intenzita elektrického pole $\vec{E}$ [$V \cdot m^{-1}$]
- elektrická indukce $\vec{D}$ [$C \cdot m^{-2}$]
- intenzita magnetického pole $\vec{H}$ [$A \cdot m^{-1}$]
- magnetická indukce $\vec{B}$ [T]
- proudová hustota $\vec{J}$ [$A \cdot m^{-2}$]
- ...

*pozn.: Šipka se používá především v rukou psaném textu, v tištěném nebo elektronickém textu vektory se značí tučným písmem. Tedy typograficky správně je nikoliv např. $\vec{B}$ ale **B**.*

Definice

Matice je obdélníková tabulka, jejímiž prvky jsou obvykle čísla

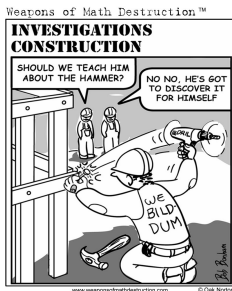
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & \dots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Rozměry matice ($m \times n$) se nazývají typ matice
- Dvě matice lze sčítat jen jsou-li stejného typu
- Dvě matice lze násobit jen jsou-li typu $m \times p$ a $p \times n$
- Tedy lze násobit čtvercové matice, ale obvykle platí: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Matematický úvod

Matice – k čemu nám jsou

- Matice je formalizovaným zápisem soustavy rovnic
- Matice reprezentuje data $\Rightarrow$ korelační matice, kontingenční tabulka
- Rozsáhlá matice reprezentuje obraz i některé operace s ním
- Matice reprezentuje některé „šikovné“ operace s vektory



Matematický úvod

Komplexní čísla

- Již kvadratická rovnice nemusí mít v reálných číslech řešení
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D = b^2 - 4ac$
- Lze odmocňovat záporná čísla?
- Lze, ale výsledkem není reálné číslo!
- Definujeme komplexní jednotku $i = \sqrt{-1}$ (někdy j)



Matematický úvod

Komplexní čísla

- Obvykle značíme $z \in \mathbb{C}$
- Lze vyjádřit ve tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$
- Pak hovoříme o složkovém nebo též algebraickém tvaru
- Značíme $a = \operatorname{Re}(z)$ a $b = \operatorname{Im}(z)$
- Gaussova rovina – číslo z lze reprezentovat jako bod $[\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)]$
- z lze vyjádřit i pomocí vzdálenosti od počátku $|z|$ a úhlu mezi průvodičem a reálnou osou φ
- Goniometrický tvar: $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Exponenciální tvar: $z = |z| \cdot e^{-i\varphi}$

Matematický úvod

Derivace funkce jedné proměnné

Definice

Derivace funkce v bodě je směrnici tečny. Derivace funkce je funkcí, jejíž hodnoty jsou hodnotami směrnice tečny.

- Značení: $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\dot{f}(t), \dots$
- Korektní definice:

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Funkci lze derivovat bod po bodu a tak lze získat opět funkci
- Opakováním derivace získáme derivace vyšších řádů

- **neurčitý integrál**

- opačný postup k derivaci, hledání primitivní funkce
- značení:

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

- **neurčitý integrál**

- Zobecnění sumace, stanovení plochy pod křivkou
- Značení:

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

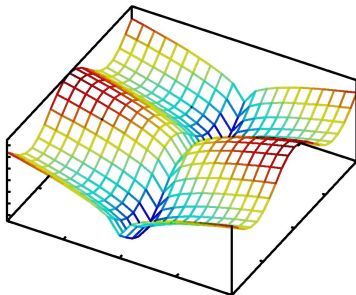
- **a ono to souvisí:**

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Matematický úvod

Funkce více proměnných

- Přirozené zobecnění funkce jedné proměnné např. $z = f(x, y)$
- Jde-li o funkci na několik proměnných, lze chápat jako několik funkcí na jednu proměnnou



Matematický úvod

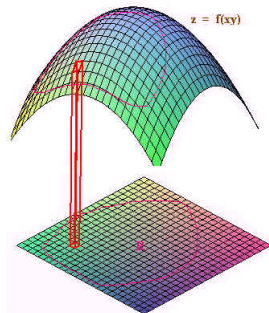
Derivace funkce více proměnných

- Opět si lze představit směrnici tečny grafu
- Kam však bude směrnice směřovat? – Různé parciální derivace
- Parciální derivace ve směru os: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$
- Gradient: $\text{grad } z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$
- Totální diferenciál: parciální derivace ve směru gradientu

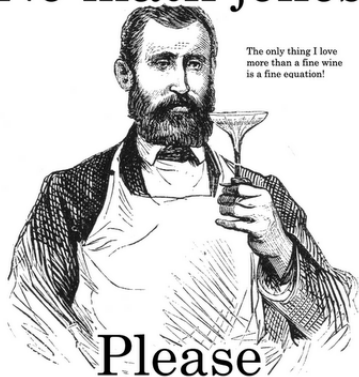
Matematický úvod

Integrál funkce více proměnných

- Základem je určitý integrál
- Několik úrovní abstrakce
 - Riemannův
 - Lebesgueův
 - Kurzweilův
 - ...
- význam má objemu pod plochou



No math jokes



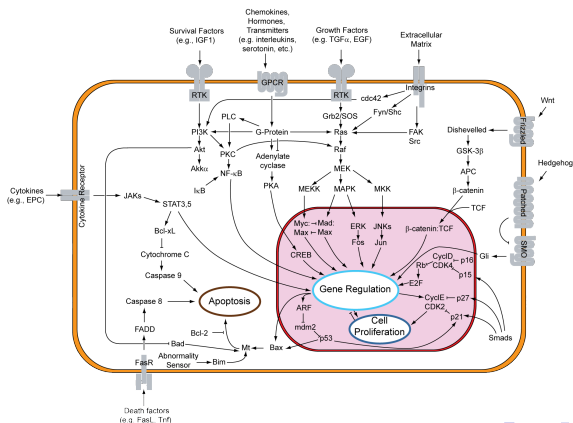
- Systém je poměrně obecný pojem, vyjadřuje obvykle nějaké uspořádání prvků a vztahů mezi nimi
- Příklady systémů:
 - Fylogenetická klasifikace šelem
 - Model ekosystému
 - Blokové schéma osciloskopu
 - Kompartimentový model pohybu xenobiotika
 - Metabolické dráhy
 - Jing a jang – *i neexistující věc lze popsat jako systém*
 - ...
- Tak jak z toho udělat „obecnou“ definici?

Systémy

Systém je když... pracujeme systematicky

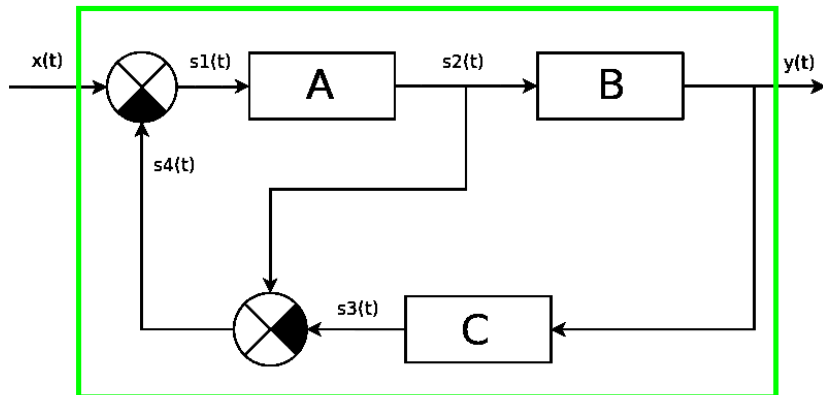
Definice

(*např.*) Systém je dvojice množin (P, V) , kde P je množina prvků a V je množina vztahů mezi nimi.



Systemy

System je když... máme hromadu bloků



- **Lineární systémy**

- Matematicky

- lze popsat lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(t)^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j x(t)^{(j)}$$

- lze popsat lineární diferenční rovnicí s konstantními koeficienty:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(t-i) = \sum_{j=0}^m b_j x(t-i)$$

- Platí princip superpozice
 - Chovají se hezky, jsou relativně dobře řešitelné, ...
 - Pro řadu zajímavých biologických systémů příliš zjednodušující

- **Nelineární systémy**

- Jakýkoliv systém, který není lineární

System

Jak souvisí signály a systémy?

- Systém je zdrojem signálu
- Signál je průchodem systémem modifikován
 - Modifikace záměrná: zpracování signálu, filtrace, ...
 - Modifikace nežádoucí: poruchy, šum, ...
- Signály a soustavy se učí na technikách jako jeden předmět



Intermezzo

už se blížíme k medicínské tematice. . .



- **Signál**

- Signál je fyzikální děj nesoucí informaci o systému
- Užitečnou informaci
- Jde o výstup systému

- **Biosignál**

- Signál nesoucí informaci o živém systému
- A jsou tu problémy:
 - Co je informace?
 - Co je systém?
 - Co je živý systém?
 - ...

	bezčasové	časové
jednorozměrné	střední tlak krve	teplotka, oxymetrie
vektor	teplota+tlak+BMI	EKG, EEG
dvojměrný	RTG	sono, scinti
trojměrný	CT, MRI	4D sono

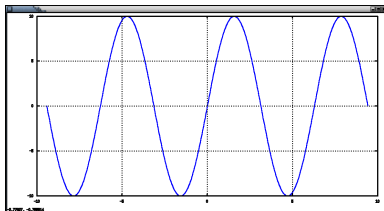
Jak je to s tím časem?

- Vlastně je to další rozměr
- Tedy nativně chápané biosignály mohou mít jeden až čtyři rozměry
- Mohou mít i víc rozměrů? Proč?

Biosignál

Deterministický signál

- Idealizace: jednoznačně určená hodnota v každém bodě
- Lze jednoznačně popsat funkcí $y = f(t, x_1, x_2, x_3, \dots)$
- Funkce, resp. posloupnost, je matematickým modelem deterministického (bio)signálu
- V technice užitečné – např. střídavý proud
- V medicíně spíše teoretický význam



- Reálná situace: náhody se nezbavíme – šum, onemocnění,...
- Matematickým modelem je náhodný proces $\{X(t, x_1, x_2, x_3, \dots)\}$
- Výhody
 - Dostatečně obecné
 - Dostatečně věrné
- Nevýhody
 - Lze popsat jen pravděpodobnostmi
 - Příliš obecné
 - Matematický aparát se neučí se na střední škole



- **Spojité čas (resp. libovolná nezávisle proměnná)**

- Spojitý – lze si představit jako plynulý
- Deterministický signál → modelem je funkce
- Stochastický signál → modelem je spojitý náhodný proces

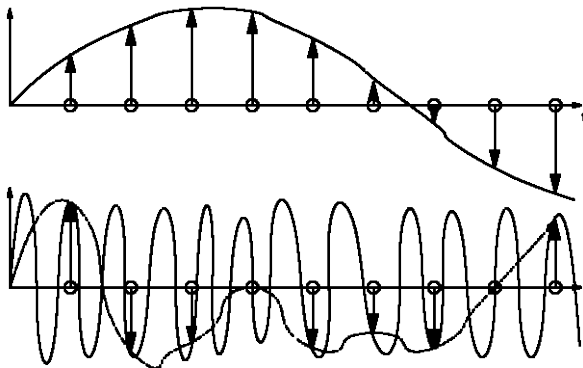
- **Diskrétní čas**

- Čas je definovaný jen v izolovaných okamžicích
- Mezi okamžiky nemusíme vidět – např. čas mezi měřeními
- Mezi okamžiky nemusí být signál definovaný – např. natalita
- Deterministický signál → modelem je posloupnost
- Stochastický signál → modelem je diskrétní náhodný proces

- **Diskrétní hodnoty**

- Hodnoty jsou vybírány jen z konečné množiny
- Výsledek kvantování – např. cena v korunách, číslice na displeji
- Přirozeně diskrétní signál – např. počet nemocných, náklady

- Pro celou řadu úloh je třeba z (bio)signálu se spojitým vybrat jen vzorky
- Vzorkovat lze rovnoměrně nebo nerovnoměrně



1 Pasivní biosignály

- Organismus není zdrojem energie
- Organismus modifikuje vnější energii
- Např. rentgen, ultrazvuk či bioimpedance

2 Aktivní biosignály

- Organismus je zdrojem energie
- Tuto energii registrujeme a zesilujeme
- Např. EKG, spirometrie či ergometrie

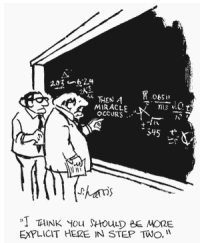


1 Časová doména

- Podíváme se na signál „tak jak je“
- Amplituda, frekvence, intervaly, grafoelementy,...
- V angličtině *space domain*

2 Frekvenční doména

- Použití Fourierovy transformace
- Vznikne spektrum signálu
- Obecně je Fourierovské spektrum komplexní

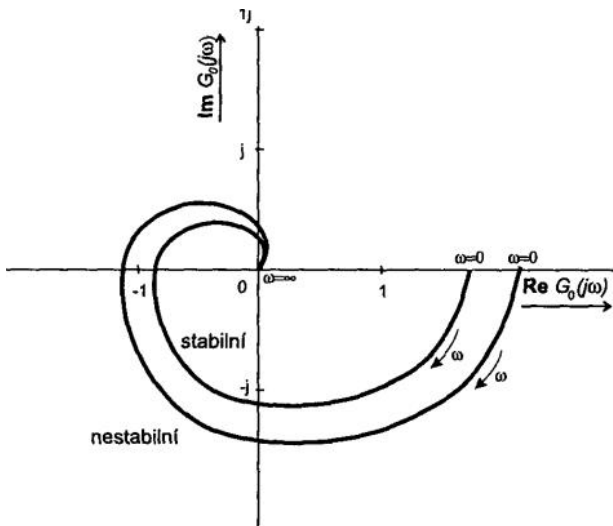


Definice

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

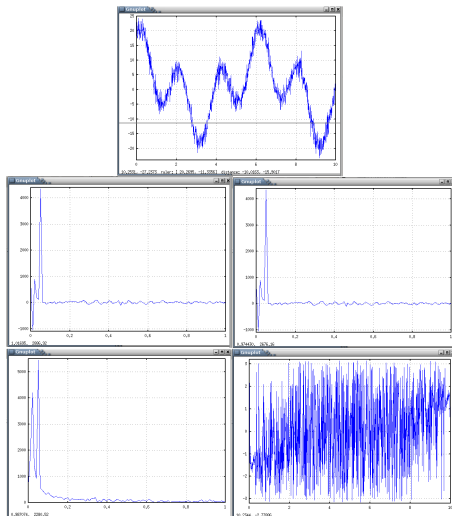
- hovoříme o frekvenčním obrazu funkce
- obecně komplexní funkce $\Rightarrow$ hůře znázornitelné





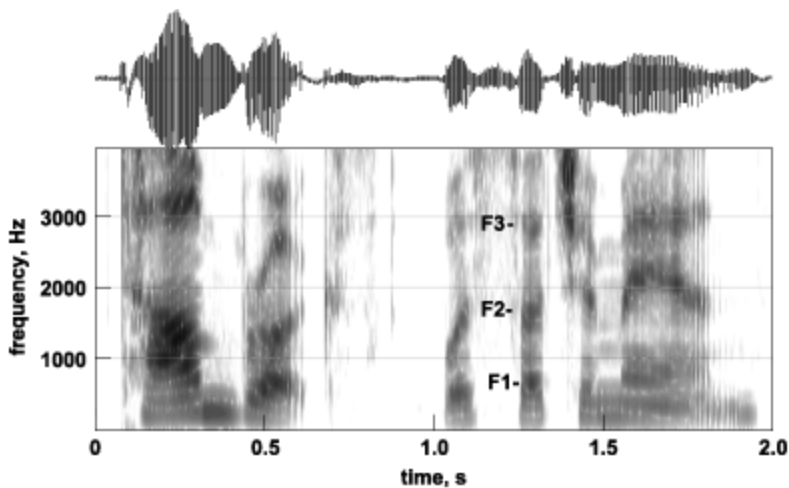
Biosignál

Spektrum signálu – amplitudová a fázové spektrum



Biosignál

Spektrum signálu – výkonové spektrum



Fourierova analýza

Příklady použití

- Detekce periodicity
- Minimalizace šumu
- Rozpoznání signálů
- Digitální filtry
- Ve frekvenční doméně probíhají některé výpočty rychleji
- Analýza obrazových dat
- Zpracování audiosignálu v kochleárním implantátu
- ...

Další přístupy k analýze (bio)signálů

Jsou složitější

- Odhady parametrů signálu jako náhodného procesu
- Waveletová analýza – tzv. časově frekvenční oblast
- Neuronové sítě – „nezajímá nás, jak to udělají“
- ...

A to je konec přednášky...

Má někdo sílu na dotazy?



Albrecht Dürer (1471 – 1528): Utrpení deseti tisíc křesťanů